Ein Blick in das Zwei-Umschläge-Paradoxon[1]

RUMA FALK, JERUSALEM UND RAYMOND S. NICKERSON, CAMBRIDGE, MA

[1] aus: *Teaching Statistics* 31 (2009), 2, S. 39–41
Übersetzung: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

***Zusammenfassung**: Wenn sich in zwei verschlossenen Umschlägen Geld befindet und man nur weiß, dass sich in einem Umschlag doppelt so viel Geld wie in dem anderen befindet, dann sollte ein Spieler indifferent in der Wahl zwischen beiden sein. Wenn aber ein Umschlag geöffnet ist, dann sollte diese Entscheidung von dem beobachteten Wert und der eigenen subjektiven Wahrscheinlichkeit abhängen.*

1 Einleitung

Angenommen man zeigt Ihnen zwei verschlossene Umschläge, von denen jeder einen gewissen Geldbetrag beinhaltet. Einer der Umschläge – Sie wissen aber nicht welcher – enthält zweimal so viel Geld wie der andere. Sie dürfen sich einen Umschlag auswählen und behalten, was auch immer im Umschlag ist. Sie wählen per Zufall einen Umschlag, aber bevor Sie ihn öffnen, erhalten Sie die Möglichkeit, den Umschlag noch mal zu wechseln. Was sollen Sie tun?

Die folgenden Argumente schlagen vor, dass Sie wechseln sollen. Bezeichnen wir den Betrag im von Ihnen ausgewählten Umschlag mit A. Da der andere Umschlag mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder den halben oder den doppelten Betrag enthält, ist Ihr erwarteter Gewinn beim Wechseln

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} \cdot 2A = \frac{5}{4} A > A \qquad (1)$$

Wenn Sie jedoch den Betrag im anderen Umschlag mit B bezeichnen, dann sagt uns Gleichung (1), nachdem wir A durch B ersetzt haben, dass wir wiederum wechseln sollen, da der erwartete Gewinn größer als B sein wird. Bei fortgesetzter Wiederholung dieses Arguments findet man sich in einem unendlichen hin und her Pendeln zwischen den Umschlägen. Worin liegt der Irrtum in unserem Gedankengang?

Obwohl die Rechnung in (1) absolut richtig ist, lautet die Antwort, dass die primäre Voraussetzung für algebraische Konsistenz verletzt worden ist. Wie von Bruss (1996), Falk (2008) und anderen Autoren hervorgehoben wurde, steht das Symbol A im ersten Ausdruck für den größeren der beiden Beträge in den beiden Umschlägen (denn nur dann enthält der andere Umschlag $A/2$), wohingegen im zweiten Term A den kleineren der beiden Beträge bezeichnet (aus Symmetriegründen). Gleichzeitig steht A auf der rechten Seite von (1) für eine Zufallsvariable, nämlich der Betrag in Ihrem zufällig ausgewählten Umschlag.

Da jeder der beiden Umschläge mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Betrag S oder $2S$ enthält, wobei $S > 0$ der kleinere der beiden Beträge ist, ist der korrekte erwartete Betrag in beiden Umschlägen derselbe, nämlich $3S/2$. Daher lautet die Quintessenz, dass es keinen Unterschied ausmacht, ob Sie die Umschläge wechseln oder bei Ihrer Wahl bleiben.

2 Einige „Was-wäre-wenns"

Eine nahe liegende nächste Frage lautet: „Was wäre, wenn ich meinen ausgewählten Umschlag öffne und den Betrag A sehe, den er enthält?" Intuitiv mag man geneigt sein zu sagen, dass die Entscheidung zwischen Bleiben oder Wechseln von der Höhe dieses Betrags abhängen sollte. Anderseits, warum sollte das vorangegangene Argument nicht auch auf das beobachtete A angewandt werden können und ganz ähnlich Indifferenz implizieren?

Angenommen, der Betrag A in meinem Umschlag ist 100000. Vernünftige und bodenständige Überlegungen mögen mich dann glauben lassen, dass die Wahrscheinlichkeit dass 100000 der größere der beiden Beträge ist, beträchtlich größer ist als die Wahrscheinlichkeit, dass dies der kleinere der beiden Beträge ist. Als Konsequenz würde ich mich entscheiden, diesen Betrag zu behalten.

Aber wenn ich in meinem Umschlag $A = 1$ finde? Wahrscheinlich würde ich mich in diesem Fall entscheiden zu wechseln, und zwar mit der Begründung, dass der Betrag im anderen Umschlag wohl schon etwas größer sein würde. Wenn ich jedoch 10 in meinem Umschlag finde, dann mag ich tatsächlich geneigt sein zu glauben, dass mit gleicher Wahrscheinlichkeit der andere Umschlag 5 oder 20 enthält. Ersetzt man 10 für A in Gleichung (1), so erhält man einen Erwartungswert von 12,5 im anderen Umschlag und würde für den Wechsel optieren.

Daher sollten meine vorausgegangenen Vorstellungen bezüglich der Wahrscheinlichkeiten möglicher Werte in den Umschlägen eine wichtige Rolle bei der Wahl meines Zugs spielen (Christensen und Utts 1992; Nickerson und Falk 2006). Meine Entscheidung sollte von der beobachteten Höhe von A abhängen in Verbindung mit meiner subjektiven Wahrscheinlichkeit $P(A)$, dass A der größere der beiden Beträge ist. Offensichtlich impliziert $P(A) = ½$ eine Präferenz für das Wechseln wie in (1).

Löst man die Gleichung

$$P(A)\,\frac{A}{2} + (1 - P(A))2A = A$$

nach $P(A)$ auf, so erhält man $P(A) = 2/3$. Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich indifferent zwischen Bleiben und Wechseln sein sollte. Andererseits sollte ich wechseln, solange meine subjektive Wahrscheinlichkeit, dass mein gewählter Umschlag den größeren der beiden Werte hat, kleiner als 2/3 ist. Und wenn diese Wahrscheinlichkeit größer als 2/3 ist, sollte ich bei meiner ursprünglichen Wahl bleiben. (Brams und Kilgour 1995). Intuitiv ist die Schranke von 2/3 plausibel: Man sollte wechseln, wenn man glaubt, dass die Gewinnchancen, dass man den größeren der beiden Beträge hat, weniger als 2-zu-1 ist, weil, wenn man wechselt und gewinnt, der Gewinn dann zweimal mal so viel ist wie der Verlust, den man erleidet, wenn man beim Wechseln verliert.

Aber was ist, wenn meine Wahrscheinlichkeiten, dass A entweder der größere oder der kleinere Betrag *immer* gleich sind? Dies würde implizieren, dass ich unendlich oft hin und her wechsle, wie ja schon in (1) empfohlen wurde. Jedoch verletzten solche subjektiven Wahrscheinlichkeiten die grundlegenden Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der Glaube, dass, was auch immer man in einem Umschlag findet, genauso wahrscheinlich wie das doppelte (halbe) dieses Betrags ist, bedeutet (im diskreten Fall), dass unendlich viele Werte gleichwahrscheinlich sind. Jedoch ist dies eine uneigentliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Unendlich viele Werte können nicht dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten eins sein muss. Die Verbindung von Konstanz mit Unendlichkeit zieht heftige Absurditäten nach sich. (siehe z. B. Falk und Samuel-Cahn 2001).

Überraschenderweise gibt es jedoch echte Verteilungen, diskret und kontinuierlich, für die der Erwartungswert in den Umschlägen immer größer (nicht unbedingt um 25 %) ist als das A im gewählten Umschlag. Dies würde wiederum für den Wechsel sprechen, was auch immer man im Umschlag vorfindet, und das Paradoxon scheint wieder aufzutauchen (Brams und Kilgour 1995; Blachman und Kilgour 2001). Jedoch zeigten diese Autoren, dass derartig anomale Verteilungen einen unendlichen Erwartungswert haben, und sie merkten an, dass sie in materieller Weise undurchführbar sind. Es ist sinnvoll, anzunehmen, dass persönliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht anormal sein können, weil dies bedeuten würde, dass die Werte um einen nicht-existenten Schwerpunkt schwanken würden (Nickerson und Falk 2006). Wenn wir subjektiv anomale Verteilungen ausschließen, wird der Spieler sich niemals für einen beständigen Wechsel entscheiden.

Dies erledigt den Fall des Öffnens meines Umschlags. Meine informierte Entscheidung sollte vom beobachteten Wert A abhängen und sollte sich auch auf meine subjektive Wahrscheinlichkeit beziehen, dass A der größere Betrag ist. Diese Überlegungen führen manchmal zu der Entscheidung zu bleiben und in anderen Situationen – aber nicht immer – zu wechseln (ich mag auch in manchen Situationen indifferent sein). Das Paradoxon ist somit gelöst.

3 Warum das Öffnen von Bedeutung ist

Wenn mit den beiden verschlossenen Umschlägen konfrontiert, deren Identität unbekannt ist, ist alles symmetrisch bezüglich der beiden Umschläge. Keinerlei Information ist gewonnen, wenn man einen Umschlag nimmt, so dass man indifferent sein sollte bezüglich Bleiben oder Wechseln. Wenn man jedoch einen Umschlag öffnet, erhält man einige Information bezüglich eines der beiden Umschläge. Damit ist die Symmetrie aufgehoben. Sobald Sie den Betrag im Umschlag sehen, kommen Ihre Überzeugungen bezüglich der Geldwerte, welcher voraussichtlich mehr oder weniger der größere Betrag ist, ins Spiel.

Zurück zu Formel (1): die paradoxe Schlussfolgerung, dass man immer wechseln sollte, ist aus unterschiedlichen Gründen in den beiden Fällen verkehrt. Im Fall verschlossener Umschläge, liegt der Fehler darin, dass A zur gleichen Zeit eine Zufallsvariable und zwei unterschiedliche Werte, die diese Variable annehmen kann, bezeichnet. Obwohl im Fall des offenen Umschlags A durchgängig denselben beobachteten Wert bezeichnet und der andere Umschlag tatsächlich entweder $A/2$ oder $2A$ beinhaltet, ist es nicht wahr, dass die Wahrscheinlichkeiten dieser zwei Möglichkeiten immer gleich sind. Diese Wahrscheinlichkeiten variieren als eine Funktion von A und dem eigenen vorausgegangenen Wissen und den eigenen Überzeugungen. Man könnte jedoch darauf bestehen den festen aber ungesehenen Betrag im Umschlag mit A auch in dem Fall verschlossener Umschläge zu bezeichnen, so dass A denselben unbekannten Wert in allen Teilen von (1) bezeichnet. Aber dann können wiederum die Wahrscheinlichkeiten, dass der andere Umschlag entweder $A/2$ oder $2A$ enthält, für alle möglichen Werte von A nicht gleich sein. Daher sollte man indifferent sein, wenn man den Wert im Umschlag nicht sieht, oder sich ganz weigern, das Spiel zu spielen.

Danksagung

Wir danken Raphael Falk für kritisches Lesen und hilfreiche Kommentare. Der zweite Autor dankt der US National Science Foundation für Unterstützung im Rahmen von Grant 0241739.

Literatur

Blachman, N. M. and Kilgour, D. M. (2001): Elusive optimality in the box problem. *Mathematics Magazine 74*(3), S. 171–181.

Brams, S. J. and Kilgour, D. M. (1995): The box problem: To switch or not to switch. *Mathematics Magazine 68*(1), S. 27–34.

Bruss, F. T. (1996): The fallacy of the two envelopes problem. *Mathematical Scientist 21*, S. 112–119.

Christensen, R. and Utts, J. (1992): Bayesian resolution of the „exchange paradox". *American Statistician 46*(4), S. 274–276.

Falk, R and Samuel-Cahn, E. (2001): Lewis Carroll's obtuse problem. *Teaching Statistics 23*(3), 72–75.

Falk, R. (2008): The unrelenting exchange paradox. *Teaching Statistic*s *30*(3), S. 86–88.

Nickerson, R. S. and Falk, R. (2006): The exchange paradox: Probabilistic and cognitive analysis of a psychological conundrum. *Thinking & Reasoning 12*(2), S. 181–213

Anschrift der Verfasser

Ruma Falk
Hebrew University
Jerusalem, Israel
rfalk@cc.huji.ac.il

Raymond S. Nickerson
Tufts University
Cambridge, MA, USA
r.nickerson@tufts.edu